

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO**CORSO DI ORDINAMENTO****SESSIONE ORDINARIA**Tema di: **MATEMATICA**

a. s. 2002-2003

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti del questionario.**PROBLEMA 1**Si consideri un tetraedro regolare T di vertici A, B, C, D .

- a)** Indicati rispettivamente con V ed S il volume e l'area totale di T e con r il raggio della sfera inscritta in T , trovare una relazione che leghi V, S ed r .
- b)** Considerato il tetraedro regolare T' avente per vertici i centri delle facce di T , calcolare il rapporto fra le lunghezze degli spigoli di T e T' e il rapporto fra i volumi di T e T' .
- c)** Condotto il piano α , contenente la retta AB e perpendicolare alla retta CD nel punto E , e posto che uno spigolo di T sia lungo s , calcolare la distanza di E dalla retta AB .
- d)** Considerata nel piano α la parabola p avente l'asse perpendicolare alla retta AB e passante per i punti A, B ed E , riferire questo piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali e trovare l'equazione di p .
- e)** Determinare per quale valore di s la regione piana delimitata dalla parabola p e dalla retta EA ha area $\frac{\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^2$.

PROBLEMA 2È assegnata la funzione $f(x) = \frac{2x+1}{x^2 + m + |m|}$, dove m è un parametro reale.

- a)** Determinare il suo dominio di derivabilità.
- b)** Calcolare per quale valore di m la funzione ammette una derivata che risulti nulla per $x = 1$.
- c)** Studiare la funzione $f(x)$ corrispondente al valore di m così trovato e disegnarne il grafico γ in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), dopo aver stabilito quanti sono esattamente i flessi di γ ed aver fornito una spiegazione esauriente di ciò.
- d)** Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico γ , dall'asse x e dalla retta di equazione $x = 1$.

QUESTIONARIO

1. Dopo aver fornito la definizione di “rette sghembe”, si consideri la seguente proposizione: «Comunque si prendano nello spazio tre rette x , y , z , due a due distinte, se x ed y sono sghembe e, così pure, se sono sghembe y e z allora anche x e z sono sghembe». Dire se è vera o falsa e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.
2. Un piano interseca tutti gli spigoli laterali di una piramide quadrangolare regolare: descrivere le caratteristiche dei possibili quadrilateri sezione a seconda della posizione del piano rispetto alla piramide.
3. Dal punto A , al quale è possibile accedere, è visibile il punto B , al quale però non si può accedere in alcun modo, così da impedire una misura diretta della distanza AB . Dal punto A si può però accedere al punto P , dal quale, oltre ad A , è visibile B in modo che, pur rimanendo impossibile misurare direttamente la distanza PB , è tuttavia possibile misurare la distanza AP . Disponendo degli strumenti di misura necessari e sapendo che P non è allineato con A e B , spiegare come si può utilizzare il teorema dei seni per calcolare la distanza AB .
4. Il dominio della funzione $f(x) = \ln \left\{ \sqrt{x+1} - (x-1) \right\}$ è l'insieme degli x reali tali che:
 A) $-1 < x < 3$; B) $-1 \leq x < 3$; C) $0 < x \leq 3$; D) $0 \leq x < 3$.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una esauriente spiegazione della scelta effettuata.

5. La funzione $2x^3 - 3x^2 + 2$ ha un solo zero reale, vale a dire che il suo grafico interseca una sola volta l'asse delle ascisse. Fornire un'esauriente dimostrazione di questo fatto e stabilire se lo zero della funzione è positivo o negativo.
6. La derivata della funzione $f(x) = \int e^{-t^2} dt$ è la funzione $f'(x) = 2x e^{-x^4}$. Eseguire tutti i passaggi necessari a giustificare l'affermazione.
7. Considerati i primi n numeri naturali a partire da 1: 1, 2, 3, ..., $n-1$, n , moltiplicarli combinandoli due a due in tutti i modi possibili. La somma dei prodotti ottenuti risulta uguale a:
 A) $\frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$; B) $\frac{1}{3} n(n^2 - 1)$; C) $\frac{1}{24} n(n+1)(n+2)(3n+1)$; D) $\frac{1}{24} n(n^2 - 1)(3n+2)$.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una esauriente spiegazione della scelta effettuata.

8. x ed y sono due numeri naturali dispari tali che $x - y = 2$. Il numero $x^3 - y^3$:
 A) è divisibile per 2 e per 3.
 B) è divisibile per 2 ma non per 3.
 C) è divisibile per 3 ma non per 2.
 D) non è divisibile né per 2 né per 3.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

9. Si consideri una data estrazione in una determinata Ruota del Lotto. Calcolare quante sono le possibili cinque che contengono i numeri 1 e 90.
10. Il valore dell'espressione $\log_2 3 \cdot \log_3 2$ è 1. Dire se questa affermazione è vera o falsa e fornire una esauriente spiegazione della risposta.