

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO****CORSO SPERIMENTALE PNI****Tema di: MATEMATICA**

a. s. 2002-2003

***Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti del questionario.*****PROBLEMA 1**

Nel piano sono dati: il cerchio  $\gamma$  di diametro  $OA = a$ , la retta  $t$  tangente a  $\gamma$  in  $A$ , una retta  $r$  passante per  $O$ , il punto  $B$ , ulteriore intersezione di  $r$  con  $\gamma$ , il punto  $C$  intersezione di  $r$  con  $t$ .

La parallela per  $B$  a  $t$  e la perpendicolare per  $C$  a  $t$  s'intersecano in  $P$ . Al variare di  $r$ ,  $P$  descrive il luogo geometrico  $\Gamma$  noto con il nome di versiera di Agnesi [da *Maria Gaetana Agnesi*, matematica milanese, (1718-1799)].

1. Si provi che valgono le seguenti proporzioni:

$$OD : DB = OA : DP$$

$$OC : DP = DP : BC$$

ove  $D$  è la proiezione ortogonale di  $B$  su  $OA$ .

2. Si verifichi che, con una opportuna scelta del sistema di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche Oxy, l'equazione cartesiana di  $\Gamma$  è:  $y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$ .
3. Si tracci il grafico di  $\Gamma$  e si provi che l'area compresa fra  $\Gamma$  e il suo asintoto è quattro volte quella del cerchio  $\gamma$ .

**PROBLEMA 2**

Sia  $f(x) = a2^x + b2^{-x} + c$  con  $a, b, c$  numeri reali. Si determinino  $a, b, c$  in modo che:

1. la funzione  $f$  sia pari;
2.  $f(0) = 2$ ;
3.  $\int_0^1 f(x) dx = \frac{3}{2 \log 2}$ .
2. Si studi la funzione  $g$  ottenuta sostituendo ad  $a, b, c$  i valori così determinati e se ne disegni il grafico  $G$ .
3. Si consideri la retta  $r$  di equazione  $y=4$  e si determinino, approssimativamente, le ascisse dei punti in cui essa interseca  $G$ , mettendo in atto un procedimento iterativo a scelta.
4. Si calcoli l'area della regione finita del piano racchiusa tra  $r$  e  $G$ .
5. Si calcoli  $\int \frac{1}{g(x)} dx$ .
6. Si determini la funzione  $g'$  il cui grafico è simmetrico di  $G$  rispetto alla retta  $r$ .

## QUESTIONARIO

1. Quante partite di calcio della serie A vengono disputate complessivamente (andata e ritorno) nel campionato italiano a 18 squadre?
2. Tre scatole A, B e C contengono lampade prodotte da una certa fabbrica di cui alcune difettose. A contiene 2000 lampade con il 5% di esse difettose, B ne contiene 500 con il 20% difettose e C ne contiene 1000 con il 10% difettose.  
Si sceglie una scatola a caso e si estrae a caso una lampada. Qual è la probabilità che essa sia difettosa?

3. Qual è la capacità massima, espressa in centilitri, di un cono di apotema 2 dm?
4. Dare un esempio di polinomio  $P(x)$  il cui grafico tagli la retta  $y=2$  quattro volte.
5. Dimostrare, usando il teorema di Rolle [da Michel Rolle, matematico francese, (1652-1719)], che se l'equazione:

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$$

ammette radici reali, allora fra due di esse giace almeno una radice dell'equazione:

$$nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \dots + a_1 = 0$$

6. Si vuole che l'equazione  $x^3 + bx - 7 = 0$  abbia tre radici reali. Qual è un possibile valore di  $b$ ?
7. Verificare l'uguaglianza

$$\pi = 4 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

e utilizzarla per calcolare un'approssimazione di  $\pi$ , applicando un metodo di integrazione numerica.

8. Dare un esempio di solido il cui volume è dato da  $\int_0^1 \pi x^3 dx$ .
9. Di una funzione  $f(x)$  si sa che ha derivata seconda uguale a  $\sin x$  e che  $f'(0) = 1$ .

Quanto vale  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)$ ?

10. Verificare che l'equazione  $x^3 - 3x + 1 = 0$  ammette tre radici reali. Di una di esse, quella compresa tra 0 e 1, se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.